View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Revista Amazonia Investiga

Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea

Difficulties in learning the formal deductive demonstration in euclidean geometry

Fecha de recepción: 10 de marzo de 2015 / Fecha de aceptación: 17 de abril de 2015

Escrito por: Samuel Morales Parra[12]
Carmen Samper[13]

Resumen

En este artículo se describen y ejemplifican dos tipos de dificultades identificadas en los estudiantes de un curso de geometría euclidea del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física, en la Universidad de la Amazonia. Dichas dificultades afectan la posibilidad de construir demostraciones. Para determinar las dificultades, se analizaron tanto las producciones escritas como la interacción entre los maestros en formación cuando intentaban producir una demostración. Se usaron las categorías creadas, definidas y ejemplificadas por el equipo de investigación Æ· G (Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría) de la Universidad Pedagógica Nacional. Se finaliza el artículo con unas sugerencias que podrían ayudar a los estudiantes a no incurrir en los asuntos problemáticos descritos.

Palabras claves: demostración, geometría euclídea, geometría dinámica, dificultades de aprendizaje.

Abstract

In this article there are described and exemplify two types of difficulties identified in the students of a course of Euclidean geometry of the first semester of the bachelor of Mathematics and Physics, in the University of the Amazonia. Such difficulties affect the possibility of building demonstrations. To determine the difficulties, there were analyzed so much the productions written as the interaction between the teachers in formation when they were trying to produce a demonstration. There were used the created, definite categories exemplified by the equipment of investigation Æ· G (Learning and Education of the Geometry) of the Pedagogic National University. The article concludes with a few suggestions that might help the students not to incur the problematic described matters.

Key Words: demonstration, Euclidean geometry, dynamic geometry, difficulties of learning.

[12] Profesor de Matemáticas y Física, Normal Nacional de Florencia Caquetá. Profesor catedrático Uniamazonia.
[13] Profesora del Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional.

Introducción

En este artículo se presenta parte de la investigación titulada: *Dificultades de los estudiantes en la construcción de la demostración deductiva formal en geometría euclídea: Un estudio en la formación inicial de profesores de matemática*. Se trata de una investigación educativa del tipo investigación acción, la cual adoptó la metodología cualitativa, situada en la tradición descriptiva e interpretativa que se enfoca en la recolección de datos, su interpretación, y análisis participativo. Ortiz y Borjas (2008, p. 4).

El propósito de la investigación fue identificar las dificultades de los estudiantes en la construcción de demostraciones deductivas formales en geometría euclidiana.

Para su fundamentación teórica se conceptualizó acerca de los siguientes tópicos: la demostración, tipos de demostración, dificultades en la construcción de demostraciones geométricas y el manejo y la comprensión del enunciado de un teorema:

En matemáticas, una demostración es el encadenamiento de afirmaciones, generalmente. Se usa el esquema de razonamiento válido *Modus Ponendo Ponens*[14], en el que las afirmaciones se van deduciendo de postulados, definiciones y teoremas demostrados con anterioridad, a partir de unos datos dados y, mediante el empleo de esquemas de razonamiento válidos. Ello es lo que permite decidir la veracidad o no de una afirmación, dentro de un sistema teórico específico.

La demostración de una proposición o de un teorema se hace con uno o varios propósitos, uno de los cuales, se mencionó anteriormente: incluir una afirmación en un sistema teórico. Otro es para autoconvencerse o convencer a otros de la veracidad de una aseveración. Araujo, Giménez y Rosich (2009: p.1) plantean que los estudiantes tienen un concepto débil del significado de la demostración y que uno de los objetivos de los cursos de geometría en el bachillerato debe ser convencerlos de que tal proceso se puede desarrollar en todos los niveles de la educación secundaria. No es un tema que se puede enseñar o tratar de una sola vez en un sólo grado. El proceso de enseñanza – aprendizaje se debe hacer gradualmente desde los primeros grados de la educación básica. Dreyfus, citado por Bernardis & Moriena (2015) expresa que "es necesario que los estudiantes se enfrenten realmente a preguntas cuya naturaleza les pida que razonen, argumenten y justifiquen las afirmaciones matemáticas" (p. 1). Al ser la Licenciatura en Matemáticas y Física un programa para la formación inicial de profesores, es necesario que los alumnos no sólo aprendan a demostrar sino que también desarrollen una visión amplia de las funciones de la demostración y que adquieran la capacidad de construir ambientes de aprendizaje que favorezcan esta actividad en el aula.

Por evidente y claro que parezca el enunciado de una proposición en geometría, cuando se representa la situación con el apoyo de un programa de geometría dinámica se promueve una mejor comprensión de los conceptos que intervienen en ésta y de las relaciones que se evidencian entre los objetos o partes de éstos. Ello, además, puede ser fuente de ideas para construir la demostración porque en el entorno de la geometría dinámica se establecen, confirman y verifican propiedades generales de las figuras. Esto lleva a convencerse de que lo que se evidencia puede ser verdadero. Sin embargo, es importante entender que sólo cuando se construye una demostración basada en el sistema teórico se logra establecer la veracidad de la generalidad de la proposición. En palabras de Fetisov (1980): "existe otra razón más extraordinariamente importante que condiciona la necesidad de la demostración. Se trata de que la geometría no es una colección casual de verdades que definen las propiedades espaciales de los cuerpos, sino un sistema científico construido de acuerdo con leyes rigurosas. En este sistema cada teorema está relacionado

[14] *Modus Ponendo Ponens*: Del dato dado p y la regla $p \rightarrow q$ se concluye como verdadera la aserción q.

orgánicamente con un conjunto de proposiciones antes establecidas y esta relación se pone de manifiesto por medio de la demostración . . .” (p.17). De esta manera, cada teorema o proposición a demostrar está relacionada con un sistema de postulados, definiciones y teoremas demostrados anteriormente.

Por otra parte, existen diferentes tipos de demostraciones. Dal Maso (2007, p. 32) cita a varios autores que tipifican las demostraciones: a) *deductiva formal*, que tiene como función principal, según Alan Bell (1976), la sistematización, pues el objetivo es incluir el enunciado demostrado en un sistema de axiomas, definiciones y otros teoremas. La clase de demostración que se espera desarrollen los estudiantes de este espacio académico; b) también encaja en las llamadas por Balacheff (1988) *conceptuales*, que se fundamentan en la formulación abstracta de propiedades matemáticas y de relaciones deductivas entre ellas; c) Harel y Sowder (1988), proponen esquemas de demostración que agrupan en tres categorías – *convicción externa*, los *empíricos* y los *analíticos*. Estos últimos se llaman así porque se fundamentan en argumentos abstractos y en la deducción lógica. Corresponden, por lo tanto, a lo que se espera puedan realizar los estudiantes de la Licenciatura.

Por otro lado, Gutiérrez (2001), expuso que los modelos de demostración vigentes hasta entonces ya no podían ser los mismos, pues ahora se cuenta con el apoyo de un software de geometría dinámica como *Cabri* para el desarrollo de los procesos de demostración. En consecuencia, él y el grupo de investigación de la Universidad de Valencia, del cual es integrante, plantearon una reclasificación de éstos. En esta perspectiva, clasifican los modelos de demostración en dos grandes grupos: *empíricos* y *deductivos*.

En una segunda fase se ubican las demostraciones que deben hacer los estudiantes. Las de tipo *deductivo*, se desglosan en dos subgrupos: el *experimento mental* subdividido a su vez, en experimentos de tipo *transformativo* y los de tipo *axiomático;* además, de la demostración *deductiva formal* que se caracteriza por las cadenas de deducciones lógicas formales pero sin soporte de ejemplos.

En el trabajo se utilizan dos de las categorías de dificultades presentadas por los estudiantes en la construcción de demostraciones geométricas, propuestas por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), con sus respectivas subcategorías, las cuales nombran como: “relacionados con prerrequisitos de aritmética de los reales, álgebra o teoría de conjuntos y relacionadas con la comprensión y el manejo del enunciado de un teorema” (p. 256 – 277). Estas autoras han identificado diversas dificultades que surgen cuando los estudiantes intentan producir demostraciones de afirmaciones en geometría euclidiana. Las han clasificado teniendo en cuenta los asuntos estructurales a los que corresponden. Estos son:

1. El trabajo dentro de un sistema axiomático;
2. El uso de la lógica matemática como guía y sustento del razonamiento requerido para producir una justificación;
3. Los prerrequisitos de aritmética de los reales, álgebra o teoría de conjuntos;
4. La comprensión y el manejo del enunciado de un teorema.

En cuanto a la primera categoría o asunto estructural, Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), expresan que trabajar sujetos a un sistema teórico requiere que: a) el estudiante formule bien las definiciones; b) esté atento al cumplimiento de las condiciones exigidas en la hipótesis de un teorema antes de usarlo; c) respalde, a partir del sistema teórico, toda afirmación hecha; y, d) use adecuadamente los términos existir, escoger, localizar y determinar.

En la investigación, la primera categoría que se usó en el análisis tiene que ver con lo que deben saber los estudiantes respecto a la aritmética de los números reales y con propiedades del álgebra y de la teoría de conjuntos. Específicamente, se identifican

 ISSN 2322- 6307

dificultades que tienen que ver con el conocimiento tanto conceptual como procedimental de las propiedades de los números reales y de la relaciones de igualdad y desigualdad; entre ellos, el uso incorrecto del Principio de Sustitución[15]. Así mismo, se evidencian dificultades relacionadas con el conocimiento conceptual y procedimental de las operaciones entre conjuntos y, el manejo de la sintaxis de la teoría de conjuntos.

La segunda categoría hace referencia al uso incorrecto de la lógica matemática, lo cual se da frecuentemente porque el estudiante no tiene el conocimiento conceptual y procedimental de las conectivas lógicas y de las tautologías asociadas o, porque no sabe cómo hacer pruebas indirectas. Esta categoría está relacionada con el manejo y la comprensión del enunciado de un teorema. Ello significa que se han identificado dificultades para establecer las condiciones que se consideran válidas en un enunciado, reconocer cuál es el hecho que se debe demostrar, y expresar como proposición condicional una afirmación formulada en lenguaje natural. También, incluye las dificultades relacionadas con expresar una afirmación general en términos de la situación que se tiene en manos o, realizar el procedimiento contrario.

En esta dinámica, la intención de este artículo es analizar las dificultades relacionadas con las dos últimas categorías referenciadas; se indican los asuntos puntuales, y se presentan ejemplos de éstas, extraídos de los protocolos de las clases que fueron grabadas.

El trabajo investigativo se desarrolló con 28 jóvenes del primer semestre académico al Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia, en la sede principal de Florencia, Caquetá.

[15] Principio de Sustitución: se refiere a la posibilidad de reemplazar, en un enunciado sobre un objeto matemático, la referencia a dicho objeto por cualquier expresión equivalente a este sin cambiar el valor de verdad correspondiente.

Para la fundamentación teórica y conceptualización de las categorías de análisis, se realizó una revisión documental de artículos y publicaciones relacionadas a la demostración en matemáticas, aprendizaje de la demostración y aprendizaje de la demostración con el apoyo de un software de geometría dinámica. También, se estudiaron investigaciones de diversas fuentes bibliográficas propiciadas por investigadores contemporáneos en el contexto nacional, latinoamericano, e internacional, sobre el proceso de demostración utilizando software de geometría dinámica realizado en un curso de geometría plana.

Como resultado del estudio, se hacen sugerencias para la acción y diseño de actividades que propicien la comprensión de las actuaciones problemáticas, primer paso, para superarlas, y se dan las herramientas necesarias para evitar ese comportamiento.

Método

Respecto a la metodología, el trabajo investigativo se desarrolló con 28 jóvenes quienes ingresaron en ese tiempo, al primer semestre académico al Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia, en la sede principal de Florencia, Caquetá. En este caso, los actores se convierten en los protagonistas del proceso objeto de estudio para determinar las dificultades que tenían como estudiantes para aprender a demostrar. Para realizar el análisis, se usaron las categorías establecidas previamente por el grupo de investigación Æ·G de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá).

Se hicieron 12 grabaciones en audio y audio-video, que incluyeron no solo los momentos en que se hacía presentación pública de demostraciones sino también aquellos en que trabajaban los equipos de estudiantes, durante las sesiones de trabajo en clase. Cada uno de los cuatro integrantes de los siete equipos de trabajo, contaba con una calculadora graficadora algebraica – CGA –, en la cual estaba instalado el programa de geometría dinámica *Cabri Geometri II*. Además, se compilaron las producciones escritas de los estudiantes (autoprotocolos) en los que registraron las demostraciones por ellos construidas. Se procedió luego, a sistematizar la información registrada a través del análisis de la transcripción de los protocolos de cada una de las sesiones realizadas.

Con base en la sistematización de los registros de clase, se hizo el estudio del tipo de dificultad que se iba identificando. Se tomaron como categorías de análisis, las dos creadas, propuestas, definidas y ejemplificadas por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), del grupo Æ•G de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, anteriormente mencionadas.

Resultados y Discusión.

En primera instancia, se presentan los resultados de cada una de las categorías de análisis:

- *Dificultades relacionadas con prerrequisitos de aritmética de los reales, álgebra o teoría de conjuntos***.**

Las dificultades identificadas en la tercera categoría propuesta por el grupo Æ·G son las relacionadas con la aritmética de los reales, álgebra o teoría de conjuntos. Esta categoría de análisis tiene como subcategorías las siguientes, señaladas en la tabla 1:

Tabla 1. *Subcategorías de las dificultades aritmética de los reales, álgebra o teoría de conjuntos.*

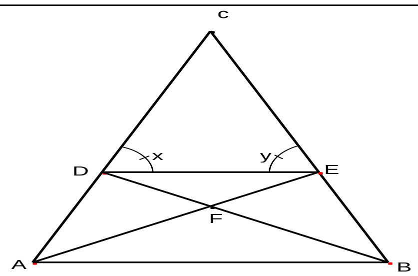
a.	*Conocimiento conceptual y procedimental de las propiedades de los números reales.*
b.	*Conocimiento conceptual y procedimental de la igualdad como relación de equivalencia y de la desigualdad como relación de orden*
c.	*Comprensión del principio de sustitución*
d.	*Conocimiento conceptual y procedimental de las operaciones entre conjuntos.*
e.	*Manejo de la sintaxis de la teoría de conjuntos en la formulación de enunciados para hacerlos operativos*

Estas subcategorías se constituyen en la fuente para describir y ejemplificar, con producciones de los estudiantes, cada una de ellas. En los protocolos, se usa la letra P para indicar que es el profesor quien interviene y, los nombres de los estudiantes, cuando ellos participan.

1. Conocimiento conceptual y procedimental de las propiedades de los números reales. Para hacer demostraciones en geometría euclidiana, se manejan premisas que involucran medidas de segmentos o ángulos, en donde las propiedades de los números reales son importantes. Dichas premisas se pueden convertir en un factor de dificultad para la demostración porque los estudiantes cometen errores en el desarrollo procedimental de ecuaciones o en el uso de teoremas que se deducen de las propiedades de los números reales. En el siguiente ejemplo, se ilustran y explican errores asociados a esta dificultad.

Con el propósito de llegar a demostrar que el $\angle ADF$ es congruente con el $\angle BEF$ y a partir de ello, demostrar la congruencia del ΔADF con el ΔBEF. Al respecto, Luís, escribe y justifica los pasos de la demostración. En el Cuadro 1, se presenta la parte del protocolo en el que se evidencian las dificultades relacionadas con este asunto, como se señala en la tabla 2:

Tabla 2. *Ejemplo, pasos de la demostración*



Luis	*La novena afirmación es que la medida del ángulo $\angle CDF$ es igual a la medida $\angle x$ más la medida del $\angle EDF$ Postulado de adición de ángulos y de la afirmación 8.*

Luis	*En la diez [afirmación] yo despejo la medida del ángulo x, entonces me resulta que la medida del ángulo $\angle CDF$ menos la medida del $\angle EDF$ es igual a la medida del $\angle x$ por transposición de términos en la afirmación 9.*
Luis	*En la once [afirmación]: Entonces ahora digo que **D** está en el interior del ángulo $\angle CEF$, de la gráfica y definición de punto en el interior de un ángulo.*
Luis	*En la [afirmación] doce: sumo para obtener la medida del ángulo $\angle CEF$ que es igual a la media del $\angle DEF$ más la medida del ángulo **y**, por el postulado de adición de ángulos en la afirmación 11.*
Luis	*En la afirmación trece, despejo la medida del ángulo **y**. Por transposición de términos, la media del $\angle CEF$ menos la medida del ángulo $\angle DEF$ es igual a la $m\angle y$ por transposición de términos en la afirmación 12.*
Luís	*Entonces en la afirmación catorce, igualo las medidas de los ángulos, digo: la medida del $\angle CDF$ menos la medida del $\angle EDF$ es igual a la medida del $\angle CEF$ menos la medida del $\angle DEF$ por igualación de las afirmaciones 10 y 13.*
Luís	*Quince: medida del $\angle CDF$ es igual a la medida del $\angle CEF$ por la propiedad cancelativa de los números reales, en la afirmación 14 y de la gráfica.*
Luís	*Dieciséis, digo también que la medida del $\angle EDF$ es igual a la medida del $\angle DEF$ por la propiedad cancelativa de los números reales, en la afirmación 14 y multiplicando por (-1) para poder cancelar y de la gráfica.*

Para arribar con éxito a la afirmación quince transcrita en el cuadro anterior, el estudiante debió haber afirmado previamente que la medida del $\angle DEF$ DEF es igual a la del $\angle$, cuestión que le permitiría usar la propiedad cancelativa pero no lo hizo. Él toma la siguiente situación como válida, para deducir las afirmaciones 15 y 16: si $a - b = c - d$, entonces $a = c$ y $b = d$. Es decir, él consideró que al tener una igualdad entre dos diferencias, podía aplicar la propiedad cancelativa a los sustraendos, sin conocer que ellos sean iguales, para obtener la igualdad entre los minuendos.

1. Conocimiento conceptual y procedimental de la igualdad como relación de equivalencia y de la desigualdad como relación de orden. En relación con este aspecto, en ocasiones un estudiante logra aplicar, por ejemplo, el Postulado Adición de ángulos[16] o el Postulado del suplemento[17], para hacer dos o más afirmaciones relacionadas con medidas, pero no reconoce que puede aplicar la Propiedad Transitiva de la igualdad para deducir correctamente la igualdad entre medidas y, en consecuencia, la congruencia de algunas figuras geométricas. Por ejemplo, la afirmación 14 que Luís establece en el argumento presentado en la tabla 2, se obtiene por el uso de la Propiedad Transitiva de la igualdad pero la justificación que él provee es "por igualación de las afirmaciones 10 y 13". Es decir, Luís no expresa como justificación las propiedades que está usando.

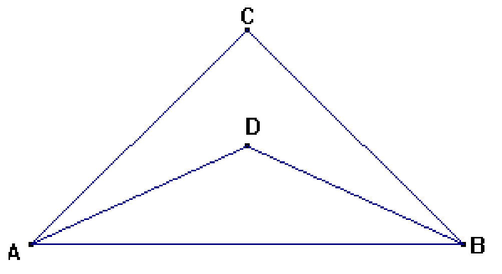
Otro ejemplo, se puede ver en el siguiente argumento presentado por la estudiante Eddy. Advirtiendo que D es un punto en el interior tanto del $\angle CAB$ como del $\angle CBA$. Ella usa el Postulado de adición de ángulos para establecer las afirmaciones 5 y 6 de su demostración, tal como se expresa en la tabla 3:

Tabla 3. Ejemplo Postulado de adición de ángulos

Datos: La figura, con $m\angle CAB = m\angle CBA$ y $m\angle DAB = m\angle DBA$
Demostrar que $m\angle CAD = m\angle CBD$

[16] Postulado Adición de ángulos: Si *D* es un punto en el interior del $\angle BAC$, entonces: $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$

[17] Postulado del suplemento: Si dos ángulos forman un par lineal, entonces, son suplementarios.



Eddy	*En la quinta premisa si puedo sumar los ángulos, así [Escribe]* $m\angle CAB = m\angle CAD + m\angle DAB$ *y digo que es por el Postulado de adición de ángulos y por la afirmación tres, profe, ¿sí? ¿Voy bien?*
P	*Bueno, su compañera pregunta que si vamos bien. ¿Qué le decimos? ¿Que corrija o que continúe?*
Varios	*[Varios estudiantes contestan al unísono.] Que siga, que va bien.*
Eddy	*Entonces, la sexta afirmación es similar y me queda [escribe]* $m\angle CBA = m\angle CBD + m\angle DBA$. *La justificación es por el Postulado de adición de ángulos y la afirmación cuatro; ahora sí voy a igualar estas dos [y señala, tocando en el tablero la afirmación cinco y la seis]*
P	*Préstenle atención a Eddy. Les pregunto: ¿Para qué va a igualar esas dos afirmaciones?*
Luis	*Para cancelar los que son iguales. [Se refiere a las medidas de los ángulos.] O sea el ángulo* $m\angle DAB$ *y el ángulo* $m\angle DBA$.
Eddy	*Bueno, entonces digo [afirmación] siete que:* $m\angle CAD + m\angle DAB = m\angle CBD + m\angle DBA$ *y digo que es por igualación de las afirmaciones cinco y seis, porque que en la [afirmación] uno dije que los ángulos grandes son iguales. Y para terminar digo que* $m\angle CAD = m\angle CBD$. *Esto por la propiedad del inverso aditivo en la afirmación 7.*

Fuente: elaboración propia.

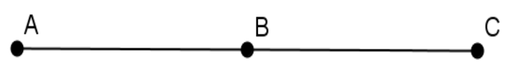
En la afirmación número siete, Eddy da como justificación la igualación entre dos de las afirmaciones. Pero es a partir de sus afirmaciones 1, 5 y 6, donde aplica la Propiedad transitiva de la igualdad de números reales, que se llega a lo que ella establece. Al concluir, ella expresa como razón para su última afirmación que está usando la Propiedad del inverso aditivo: $a+(-b) + b = a$, cuando en realidad, como lo aseguró Luis, es la propiedad cancelativa: si $a + b = b + c$, entonces $a = c$.

1. Comprensión del Principio de sustitución**.** Teniendo la igualdad entre medidas de partes de figuras geométricas, en ciertos procesos de demostración, es necesario reemplazar (sustituir) esas cantidades en otras ecuaciones para continuar con el proceso hasta completar la demostración. Por ejemplo, a partir de las afirmaciones $m\angle A = m\angle B$ y $m\angle A > m\angle C$, un estudiante deduce, usando la propiedad transitiva, que $m\angle B > m\angle C$, sin reconocer que se trata realmente de una sustitución.

En el siguiente protocolo, indicado en la tabla 4, se evidencia otro ejemplo en el cual se identifica esta misma dificultad.

Tabla 4. *Ejemplo Comprensión del Principio de sustitución*

Teorema: Si B *es el punto medio del* $\overline{AC}$, *entonces* $AB = \frac{1}{2}AC$.



Lina	*Entonces digo que, sea B el punto medio del* $\overline{AC}$, *es un dato que saco del teorema [del enunciado del teorema: Esta es la afirmación dos, ella lo escribió]*
Lina	*Como tercera afirmación escribo que se da [escribe en el tablero] A – B – C*[18] *porque la definición de punto medio quiere decir que hay un punto entre los otros.*
P	*Bueno, le pregunto a ustedes [dirigiéndose al resto de la clase] y ¿para qué nos sirve saber que B está entre A y C? Alex, díganos.*

[18] $A - B - C$ es la notación usada para indicar que B es un punto que está entre los puntos A y C.

Alex	*Pues porque ahora ya puedo sumar los segmentos* $\overline{AB}$ *y* $\overline{BC}$
P	*Mejor, digamos que para sumar las distancias AB y BC.*
Lina	*Entonces, como ustedes dicen, en la cuarta afirmación escribo que [y escribe la suma de las distancias] AB + BC = AC, y digo que es por la definición de estar entre.*
P	*Lina, ¿para qué suma las dos distancias?*
Lina	*Para poder decir que estos dos segmenticos son iguales [señala el* $\overline{AB}$ *y el* $\overline{BC}$ *]*
P	*Las longitudes de esos segmentos si son iguales, pero no es para eso que los va a sumar. Es para luego poder sustituir la longitud de uno de esos segmentos y como total, le resulte el doble de uno de ellos. A ver Lina que va a escribir.*
Lina	*Entonces, en la quinta afirmación digo que AB = BC, por la definición de punto medio y la afirmación dos.*
P	*Bueno, nuevamente les pregunto, ahora que debe escribir Lina, ¿Lina usted sabe qué sigue?*
Lina	*Si, que el segmento AC tiene dos partes iguales, separadas en el punto medio.*
P	*Lina, eso es cierto, pero ahora para continuar con la demostración, tiene que sustituir o reemplazar AB o a BC en la quinta afirmación.*
Lina	*Cómo así? [Se queda como pensando y dice] Aaaah. Ya. Entonces en la sexta digo AB + AB = AC, porque reemplazo [sustituye] la quinta [afirmación] en la cuarta.*
P	*Eso, Lina, así.*

Fuente: elaboración propia.

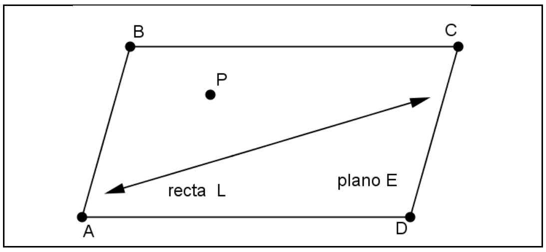
En la demostración que propone Lina, fue necesaria la intervención del profesor para indicarle cómo proceder pues no solo Lina sino varios de sus compañeros, no notaron que debían sustituir, en la afirmación siete, uno de los términos de la igualdad, que Lina expresó en la quinta afirmación de su demostración.

1. Conocimiento conceptual y procedimental de las operaciones entre conjuntos. Esta dificultad tiene que ver con comprender la relación de pertenencia y de inclusión, cuándo es una o la otra relación y, entender que cuando un conjunto no es vacío, sólo se puede asegurar que hay por lo menos un elemento en él. La unión y la intersección son las dos operaciones entre conjuntos de uso más frecuente en geometría euclídea. Los estudiantes no presentaron dificultades relacionadas con los asuntos anteriormente mencionados, al realizar sus demostraciones.

2. Manejo de la sintaxis de la teoría de conjuntos en la formulación de enunciados para hacerlos operativos. Para algunos estudiantes es factor de dificultad entender las diferencias entre las relaciones de pertenencia y de contenencia y, por ello, saber cuándo se hace referencia a una u otra de estas relaciones. Esta dificultad se evidencia en los intentos que hacen para traducir al lenguaje de la teoría de conjuntos, expresiones que establecen estas relaciones entre elementos y conjuntos o entre conjuntos. Por ejemplo, la expresión de la definición del interior de un ángulo como intersección de dos semiplanos. Esta situación se ejemplifica en la justificación propuesta por Lía (Ver tabla 5). El error se evidencia, por ejemplo, cuando se quiere indicar que un punto ***P*** no es elemento de una recta L. Es usual usar la expresión, en lenguaje cotidiano, "el punto P no está contenido en la recta L" para referirse a esta situación. El problema está cuando usan la siguiente notación para expresar la misma idea: $L \not\supseteq P$, o $P \not\subset L$. No caen en cuenta que los símbolos $\not\supseteq$ y $\not\subset$ se usan para denotar la relación entre dos conjuntos no entre un elemento y un conjunto. La formulación correcta del hecho expresado en lenguaje natural, es $P \notin L$. Relacionados con la comprensión y el manejo del enunciado de un teorema:

Tabla 5. *Ejemplo formulación de enunciados para hacerlos operativos*

Teorema 3.3: Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que contiene a ambos.



Lía	*Bueno, como primera afirmación digamos que L es una recta y P es un punto. Como razón escribimos que es una hipótesis.*
Lía	*Como segunda afirmación digo que L no contiene a P, equivale a decir que P no está contenido en L* [*escribió así:* $L \not\supseteq P \equiv P \not\subset L$] *otra hipótesis.*
P	*Lía, y todos ustedes, presten atención a lo siguiente. Lía ahí tiene dos errores de notación, de escritura; vayan pensando cuál es. Pero siga,* [*se dirige a Lía*]. *Al final les digo cuáles son.*
Lía	*Bueno, profe, en la tercera escribo que Q y R son dos puntos que están contenidos en la recta L, por el Postulado de la regla: la recta contiene infinitos puntos.*
Lía	*Digamos que Q, R y P son tres puntos que no están en la misma recta por la afirmación dos y la tres.*

Fuente: elaboración propia.

La cuarta categoría de la clasificación propuesta por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006: p. 255) tiene que ver con la comprensión y el manejo del enunciado de un teorema. Las subcategorías que las investigadoras sugieren se presentan en la tabla 6:

Tabla 6. *Subcategorías de la comprensión y el manejo del enunciado de un teorema.*

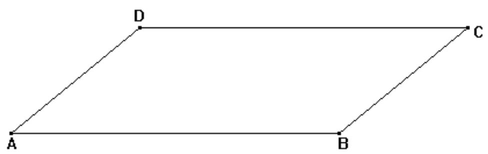
a.	*Establecimiento de las condiciones válidas en el enunciado, incluso las tácitas*
b.	*Establecimiento del hecho que se debe demostrar*
c.	*Formulación en formato lógico del hecho expresado en lenguaje natural.*
d.	*Particularización de un enunciado expresado en forma general y descontextualización de un enunciado particular para formularlo de manera general.*

A través del análisis realizado se trata de establecer que tan consciente es el estudiante respecto a lo que va a demostrar, qué comprende y conoce de lo que hay que hacer.

1. Establecimiento de las condiciones válidas en el enunciado, incluso las tácitas. El enunciado de una situación problema o de un teorema suele contener implícitamente información que debe ser explicitada por los estudiantes, pues son propiedades que obligan al cumplimiento de la tesis. La falta de reconocimiento de tal información puede ocasionar dificultades para producir una demostración. Un ejemplo de esta dificultad se evidencia en la tabla 7, donde se indica el protocolo en el que Tomás está intentando demostrar el siguiente problema:

Tabla 7. *Ejemplo del enunciado de una situación problema o de un teorema.*

Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.



Tomás	[*Dibujando un paralelogramo.*] *Bueno, nosotros empezamos a sacar primero las hipótesis. Como es un cuadrilátero, el segmento AB y CD, lo mismo que BC y AD son los lados opuestos en el cuadrilátero. Como base, entonces, yo digo por hipótesis. ¿Si, o qué? Ya. La segunda. Digo que el segmento AB.*
P	*[Repite la premisa que escribió Tomás en el tablero. Varios estudiantes desean intervenir] Pero es que no hemos dicho que esa figura es un cuadrilátero.*
Pedro	*Ahí podemos decir que el ángulo CA*
P	*[Interrumpe a Tomás] Primero digamos que tenemos un cuadrilátero; primero, que ABCD es un cuadrilátero.*
Walter	*No me parece que eso sea lo que tenemos que demostrar. . . . Por lo que [Se refiere a lo que Tomás escribió en la parte superior del tablero.] tenemos que demostrar que el ángulo ABC es congruente con el ángulo CDA y el ángulo BAD es congruente con ángulo DCB.*

P	*Ordenemos, Tomás. Empecemos diciendo que esa figura es un cuadrilátero.*
Tomás	*Entonces borramos esta [se refiere a la premisa que había escrito]. Sea A, B, C, D un cuadrilátero.*

Fuente: elaboración propia.

En la transcripción anterior se evidencia que al iniciar el proceso de demostración, Tomás tiene la dificultad expresada en este numeral, pues no identifica correctamente la hipótesis. Él no incluye como datos (dados) que la figura es un cuadrilátero y que se tiene la congruencia de ambos pares de ángulos opuestos.

1. Establecimiento del hecho que se debe demostrar. Este tipo de dificultad se ocasiona porque el enunciado de un teorema no está expresado como una condicional y, los estudiantes no logran diferenciar entre la hipótesis (hechos y situaciones geométricas dadas en el enunciado) y la tesis o conclusión a que deben llegar después de desarrollar la demostración. Esta dificultad se ilustra concretamente en la intervención de Walter registrada en la tabla 8, así como en lo que contestan tanto Luís como Tomás cuando el profesor los cuestiona acerca de qué es lo que se quiere demostrar:

Tabla 8. *Ejemplo establecimiento del hecho que se debe demostrar*

P	*Como ese, el cuadrilátero, puede ser cualquiera, ¿no? ¿Qué es lo que va a demostrar Tomás?*
Tomás	*Que los ángulos opuestos son congruentes.*
P	*Luís, ¿eso es lo que nos corresponde demostrar?*
Luís	*Pues, primero: que es un paralelogramo y luego que los ángulos opuestos . . .*
Tomás	*Ya la cogí: Que si los ángulos opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*

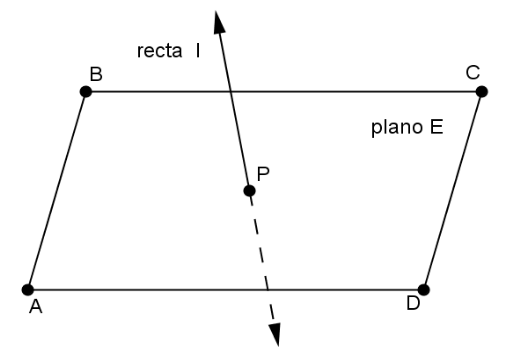
Fuente: elaboración propia.

Como se evidencia, Tomás logra establecer la propiedad que debe demostrar. Por su lado, aunque Luís menciona lo que deben demostrar, también cree que debe justificar la validez de lo que son los datos dados en la hipótesis del teorema.

1. Formulación en formato lógico del hecho expresado en lenguaje natural. Para el estudiante puede ser factor de dificultad interpretar afirmaciones expresadas en lenguaje natural como una condicional en la que se establece una dependencia. Por ejemplo, consideremos la siguiente proposición: "Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos de éste". Como no aparecen las palabras "Si" ni "entonces" en el enunciado, muchos estudiantes no reconocen que este es realmente una condicional y difícilmente llegan a transformarla como: Si *A* es un punto de la mediatriz del $\overline{XY}$ entonces $XA = YA$. En la tabla 9 se ilustra esta situación:

Tabla 9. *Ejemplo*, f*ormulación en formato lógico del hecho expresado en lenguaje natural*

Teorema 3.2: La intersección de una recta y un plano que no la contiene es exactamente un punto.



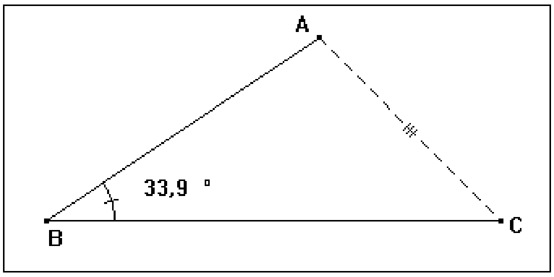
Fuente: elaboración propia.

Respecto al teorema anterior, hay dos cosas que no reconocen los estudiantes. La primera es que el enunciado realmente es una condicional, *Si una recta interseca a un plano que no la contiene entonces la intersección contiene un solo punto.* La segunda, que la hipótesis es una conjunción. Las dos condiciones exigidas son: la recta interseca el plano y la recta no está contenida en el plano.

1. Particularización de un enunciado expresado en forma general y descontextualización de un enunciado particular para formularlo de manera general. Poder expresar un hecho geométrico general para que este sea útil en una situación particular requiere nombrar las partes de una figura geométrica para poder hacer referencia a ellos al reescribir el enunciado. De esta forma, se particulariza la afirmación establecida en un enunciado. Por ejemplo, las diagonales de un paralelogramo se bisecan, se convertiría en: si $ABCD$ es paralelogramo, entonces $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.

Así mismo, es causa de dificultad poder expresar en forma general lo que se ha establecido a través de la demostración como teorema. Un ejemplo de esto, se encuentra en la solución que dieron Lucía y su equipo al problema que se describe e ilustra en la tabla 10. Ellos, construyeron el triángulo ABC y ocultaron el lado AC (segmento $\overline{AC}$) para responder a las preguntas: a) ¿Qué sucede con la medida del $\angle ABC$ al desplazar el punto ***C*** en la misma dirección? b) ¿Qué sucede con la amplitud del $\angle ABC$ al desplazar el punto ***A*** en la misma dirección? c) Generalice sus observaciones. Las respuestas de los estudiantes se registraron en la tabla 10:

Tabla 10. Ejemplo la demostración como teorema



Pregunta	*Estudiante*	*Respuesta – Conclusión*
1	*Lucía*	*Al desplazar el punto **C** en la dirección horizontal, la medida del segmento $\overline{BC}$ se puede hacer menor o mayor dependiendo del sentido en que desplacemos a **C**. La medida del $\angle ABC$ no varía.*
2	*Luís*	*Al desplazar el punto A en la dirección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, la medida del $\angle ABC$ tampoco varía, así la medida del $\overline{AB}$ se haga mayor o menor.*
3	*Rosa*	*[Conclusión:] Al alargar o acortar la medida de los segmentos que están en los lados de cualquier ángulo, no se altera la medida de este.*

Fuente: elaboración propia.

En la situación planteada, los estudiantes reconocen la invariancia de la medida del ángulo, pero se les dificultó expresar la generalidad de lo que encontraron porque no incluyeron una condición muy importante: el segmento que cambia de longitud, además de estar contenido en los lados del ángulo, debe tener un extremo en el vértice de este. La generalización correcta sería: La medida del ángulo determinado por dos segmentos, no colineales, que comparten un extremo, no depende de la longitud de estos.

Los estudiantes del curso Geometría Euclídea del primer semestre de 2006, de la Licenciatura en Matemáticas y Física, en la Universidad de la Amazonia, presentaron el mismo tipo de dificultades, al enfrentar la tarea de demostrar resultados geométricos, como las definidas por Perry, et al., (2006).

En aquellos casos donde se expresó que no se evidenció alguna de las dificultades no significa que ésta no lo sea para los estudiantes, sino que el tipo de problema que se estaba resolviendo o teorema que se estaba demostrando *no permitieron* evidenciarla.

Se pudo identificar y explicitar una nueva categoría de dificultad de los estudiantes en el proceso de construcción de demostraciones deductivas formales en geometría euclidiana que se denominó: *relacionada con el manejo de la sintaxis y/o lenguaje icónico propio de la geometría.*

Se trata de una dificultad que se evidencia con cierta frecuencia pero que no afecta el proceso que sigue el estudiante para producir una demostración porque no está relacionada con la determinación de aquellos elementos teóricos que se involucran en el proceso deductivo.

Como se considera que es un asunto que deben identificar los profesores y propender por corregir, se decidió incluirlo como una quinta categoría de dificultad. Por ejemplo: $AB \cong XY$; la distancia AB es congruente con la distancia XY, cuando en realidad, la congruencia se da entre figuras geométricas y la igualdad entre números reales.

Como estrategias que pueden apoyar a los estudiantes para sobreponer la citada dificultad es: a) analizar con ellos las definiciones, los postulados y cada propiedad exigida en los enunciados teóricos; b) cuestionar la necesidad de cada propiedad o característica enunciada; c) indagar acerca de aquello que se puede deducir de una definición o teorema; d) ilustrar con representaciones y construcciones usando geometría dinámica, la información suministrada en definiciones, postulados y teoremas para verificar que los resultados anunciados realmente se dan; e) también para favorecer la generación de ideas útiles para la demostración, solicitar que dos o tres personas pasen al tablero a escribir los enunciados que van a demostrar para compararlos, analizarlos y, f) determinar si existen incomprensiones que inducen al error.

Asimismo, siempre que se estudie un teorema o cuando se va a resolver un problema, se debe realizar una construcción con geometría dinámica, eliminando alguna de las condiciones exigidas en la hipótesis, para evidenciar como el resultado no coincide con lo establecido como tesis. Con el arrastre, se podrá observar como al obligar el cumplimiento de la propiedad eliminada, la figura simultáneamente se convierte en aquella que cumple las condiciones de la tesis.

Con base en los análisis de los datos obtenidos, se pudo analizar que:

- La dificultad que se presenta con mayor frecuencia en la construcción de la demostración deductiva formal es la del *respaldo teórico explícito y apropiado, de las proposiciones que conforman la justificación* y pertenece a la categoría *relacionadas con el trabajo dentro de un sistema axiomático*.

- Pertenecientes a esa misma categoría de análisis, se presenta la subcategoría de dificultad: *verificación del cumplimiento de las condiciones de la hipótesis del hecho geométrico que se pretende usar,* como aquella que tiene la tercera frecuencia mayor. Esta dificultad se presenta porque el estudiante usa un teorema o definición, sin tener en las afirmaciones anteriores las condiciones exigidas en la hipótesis de éstos o, no logra inferir, a partir de la hipótesis, otras premisas que se requieren explicitar para el desarrollo de la demostración.

- Como estrategia de solución se sugiere que antes de iniciar el proceso de construcción de la demostración se le exija al estudiante, la identificación de los datos o hipótesis que establece el enunciado del teorema o situación problema planteada. Similarmente, cada vez que surja el uso de un teorema para deducir una proposición, se solicite al estudiante que identifique la hipótesis de dicho teorema y compare las condiciones que ésta exige y con los pasos de la demostración que ya ha establecido.

- En coherencia con la misma categoría, se encuentra, con una frecuencia menor, la dificultad *n ecesidad de formulación precisa de las definiciones, postulados, teoremas.* Como estrategia que permita contribuir a evitar errores, se sugiere analizar con los estudiantes las diferentes interpretaciones posibles debidas a la imprecisión en el lenguaje.

- La subcategoría: *uso exclusivo de hechos geométricos previamente incorporados al sistema como respaldo de las afirmaciones que se hacen,* también tuvo una frecuencia igual a la anterior. Es importante que el estudiante comprenda que sólo aquellos hechos geométricos previamente incorporados al sistema axiomático pueden ser usados en sus demostraciones. Esta es una norma sociomatemática que debe establecerse en la clase.

- La dificultad que se identificó con la segunda mayor frecuencia es *el establecimiento de las condiciones válidas en el enunciado, incluso las tácitas,* correspondiente a la categoría: *relacionadas con la comprensión y el manejo del enunciado de un teorema.*

- Como se expresó anteriormente, el enunciado de una situación problema o de un teorema, suele contener implícitamente información que debe ser explicitada por los estudiantes, pues son propiedades que obligan al cumplimiento de la tesis. El no reconocimiento de tal información puede ocasionar bloqueos en el proceso de demostración.

- En relación con la categoría mencionada anteriormente, se presenta la dificultad: *establecimiento del hecho que se debe demostrar*, con una frecuencia relativamente baja. Así como el estudiante debe establecer las condiciones válidas en el enunciado, incluso las tácitas, se debe lograr que él tenga perfectamente claro, qué es lo que se debe demostrar, cuál es la tesis o conclusión a la que se debe llegar.

- En Correspondencia con la categoría de las dificultades: *relacionados con el uso de la lógica matemática como guía y sustento del razonamiento requerido para producir una justificación*, se identificó con una incidencia muy baja la dificultad de los estudiantes con el *conocimiento conceptual y procedimental de las conectivas lógicas y de las tautologías asociadas*. No obstante, se considera que al iniciar el curso de geometría euclidiana se debe hacer un repaso de lógica matemática acerca de: tipos de proposiciones compuestas, conectivas lógicas, tablas de verdad y esquemas de razonamiento válidos.

- Con respecto a la categoría de las dificultades: *relacionadas con prerrequisitos de aritmética de los reales, álgebra o teoría de conjuntos,* se estableció que las subcategorías correspondientes son dificultades que se han identificado en los estudiantes, aunque con bajas frecuencias.

- Para la falta de *conocimiento conceptual y procedimental de la igualdad como relación de equivalencia y de la desigualdad como relación de orden,* se sugiere hacer un repaso de las propiedades de las relaciones para que el estudiante reconozca que la igualdad es una relación de equivalencia y que una desigualdad es una relación de orden.

- La subcategoría: *manejo de la sintaxis de la teoría de conjuntos en la formulación de enunciados para hacerlos operativos,* también, se identificó como dificultad.

- Las dificultades asociadas a la categoría de análisis: *relacionadas con el manejo de la sintaxis y/o lenguaje icónico propio de la geometría*, también tuvieron alta incidencia. Se trata de una dificultad que no afecta el proceso que sigue un estudiante para construir una demostración porque no es uno de los elementos necesarios para efectuar un proceso deductivo.

Conclusiones

El uso de la geometría dinámica puede incidir en la comprensión de la necesidad de las condiciones establecidas en la hipótesis de un teorema o de un problema para que la tesis se cumpla.

Se sugiere que antes de iniciar el proceso de demostración, el estudiante identifique y dé a conocer a los coequiperos y al profesor, los datos válidos que se infieren de la hipótesis dada en el enunciado.

En el proceso de producción de demostraciones deductivas formales en geometría euclídea, es necesario usar propiedades de los números reales, las cuales se supone fueron estudiadas en la educación básica y/o media. Su desconocimiento es causa de dificultad. Se recomienda analizar éstas con los estudiantes, cada vez que se vayan a usar, para que identifiquen los errores en los que pueden estar incurriendo.

De la misma manera, se recomienda hacer un repaso acerca de algunos elementos fundamentales de la teoría de conjuntos, de manera específica: conjuntos, clases, operaciones y su relación con la lógica matemática

El uso incorrecto del lenguaje propio de la geometría afecta la comunicación clara, concisa y, posiblemente, la comprensión. Como estrategia que ayudará a obviar este tipo de dificultad, se recomienda que tanto el estudiante como el profesor que socializan por escrito en el tablero la producción de demostraciones, se esfuercen por utilizar y exigirse mutuamente el uso de la sintaxis y el lenguaje icónico propio de la geometría.

Referencias Bibliográficas

Araujo, J., Giménez, J. & Rosich, N. (2006). *Afectos y demostraciones geométricas en la formación inicial docente.* Recuperado de /html bura/ficha/params/ id/ 38135086.html

Bernardis, S. &. Moriena, S. (2015). *Geometría Dinámica & Demostraciones Geométricas.* Recuperado de http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_

Dal Maso, M. S. (2007). Dificultades en las Demostraciones en Geometría. *Revista Premisa, 9* (35), 26-36. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/35%20Dal%20Maso.pdf

Fetísov, A. (1980). *Acerca de la demostración en geometría.* (A. M. García, Trad.) Moscú - URSS: MIR.

Gutiérrez, Á. (2001). *Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles*. Actas del 5° Simposio de la SEIEM. Almería

Ortiz, M. & Borjas, B. (2008). La Investigación Acción Participativa: aporte de Fals Borda a la educación popular. En foco: fals borda: sociología del compromiso 618/ *Espacio abierto, 17* (4), 615-627

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial de profesores de matemáticas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.